PROBABILIDAD ELEMENTAL

NP I

Experimento aleatorio – Universo o Espacio Muestral – Sucesos

a. Sea un experimento que se efectúa dentro de condiciones perfectamente establecidas.
Si estas condiciones son tales que el experimento admite un único resultado, se dice que dicho experimento es determinista. Por ejemplo:

1º. Al soltar un cierto objeto desde una cierta altura y observar la dirección del movimiento ulterior del objeto, el resultado será siempre la dirección de la vertical.

2º. Al conectar 1 voltio a los terminales de una resistencia de 1 ohm se establecerá una corriente por ella, que será siempre igual a 1 amperio.

En cambio, si las condiciones según las cuales se realiza el experimento permiten la aparición de más de un resultado, se dirá que se trata de un experimento aleatorio. Por ejemplo:

1º. Al tirar una moneda y leer el resultado del tiro, los posibles resultados son cara o ceca.

2º. Al contar la cantidad de automóviles que en un día pasan por un cierto puente, los posibles resultados son 0, 1, ….

3º. Al medir la duración de una llamada telefónica elegida al azar, los posibles resultados son todos los números positivos.

Etc.

b. Se llama universo o espacio muestral de un cierto experimento aleatorio al conjunto E de todos sus posibles resultados.
Así, por ejemplo, los universos de los tres experimentos aleatorios indicados en **a** son respectivamente:

$E_1 = \{\text{cara, ceca}\}$ $\qquad$ $E_2 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $\qquad$ $E_3 = \{x \,/\, x > 0\}$

c. Se llama sucesos a los subconjuntos del universo E ($\varnothing$ y E inclusive). Al suceso $\varnothing$ se lo llamará suceso imposible.
Por ejemplo, sea el experimento aleatorio consistente en extraer un naipe al azar de un mazo de barajas españolas y verificar el palo al cual pertenece.
En este caso el espacio muestral es

$$E = \{\text{oro, espada, copa, bastos}\}$$

y algunos de los sucesos de E serán entonces:

$$\varnothing, \{\text{oro}\}, \{\text{espada, oro}\}, \{\text{oro, bastos}\}, \{\text{espada, oro, bastos}\}, \ldots, E$$

Se dirá que en la realización de un experimento aleatorio ocurre un cierto suceso cuando el resultado del experimento pertenezca a dicho suceso. Por ejemplo, si al sacar una carta del mazo antedicho aparece una copa, esto determina la ocurrencia de todos los siguientes sucesos:

{copa}, {copa, oro}, {copa, bastos}, {copa, espada}, {copa, oro, bastos}, {copa, oro, espada}, {copa, espada, bastos}, {copa, oro, espada, bastos} = *E*

Notar que el suceso *E* ocurre en toda realización del experimento.

d. Sean sucesos $A_1, A_2, \ldots$ todos pertenecientes a un mismo *E*. Se dice que dichos sucesos son mutuamente excluyentes o disjuntos si la ocurrencia de uno de ellos determina la no ocurrencia de los demás. En otras palabras, cuando

$$i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$

NP II

Definición clásica de probabilidad (Laplace)

a. El origen de la teoría de las probabilidades fueron los juegos de azar. En efecto, durante el siglo XVIII aparecieron en Francia varios juegos de este tipo, y un jugador imaginativo decidió consultar a Laplace acerca de la manera acertada de apostar en los mismos.
En el curso de la investigación subsiguiente, Laplace definió que si en un experimento aleatorio hay *N* posibles resultados y n_A de ellos suponen que ocurra el suceso *A*, se tiene que la probabilidad de este suceso *A* será:

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{\textit{Cantidad de resultados que implican la aparición de A}}{\textit{Cantidad total de resultados}} \qquad \textbf{[1]}$$

Así, según esta definición la probabilidad de sacar un múltiplo de 3 en un tiro de dados es 2/6, y la probabilidad de sacar un oro al extraer una carta de un mazo de barajas españolas es 10/40.
Desde un punto de vista matemático y formal, esta definición es enteramente consistente, pero adolece del inconveniente de que restringe mucho el campo de aplicación práctica de la teoría, según será evidente a continuación.

b. Según la definición dada en **[1]**, se tiene que en un tiro de dado será:

$$P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6 \qquad \textbf{[2]}$$

tanto para el caso de un dado perfectamente simétrico y equilibrado como para el caso de un dado cargado utilizado por un fullero.

Evidentemente, en el caso del dado perfectamente simétrico y equilibrado las probabilidades dadas por **[2]** son números que pueden ser usados con fines ulteriores, y en cambio, en el caso del dado cargado dichos números no tienen ningún sentido desde un punto de vista utilitario, teniéndose así que de usarse la definición de probabilidad de Laplace es imposible

encarar en forma provechosa el fenómeno aleatorio consistente en el tiro de un dado cargado.
Vale la pena también considerar el fenómeno aleatorio consistente en el tiro de un dado cualquiera comprado en un comercio. Si bien dicho dado no entra en la categoría de "dado cargado", también es cierto que casi con seguridad no es perfectamente simétrico y equilibrado, con lo que resulta que los números dados por **[2]** tendrán en este caso un valor utilitario relativo, que será función de la perfección del dado.

c. En general, la definición dada en **[1]** establece que la probabilidad de todos y cada uno de los N resultados posibles de un experimento aleatorio estará dada por:

$$P(un\ \ cierto\ \ resultado\ \ cualquiera) = \frac{1}{N} = \frac{1}{Cantidad\ \ total\ \ de\ \ resultados} \qquad \mathbf{[3]}$$

Puede decirse que la definición de probabilidad dada por Laplace constituye un modelo matemático del fenómeno aleatorio, y más adelante se probará que dicho modelo será válido a condición de que lo sea la expresión **[3]**.

d. También es evidente que, salvo ocasionales artificios ad-hoc, es imposible usar la definición de Laplace en el caso de que la cantidad de resultados del experimento sea infinita.
Sea por ejemplo la elección al azar de un número real comprendido entre 0 y 1. La definición de Laplace especifica que la probabilidad de haber elegido un número racional es:

$$\mathrm{P(racional)} = \frac{\text{Cantidad de números racionales entre 0 y 1}}{\text{Cantidad total de números reales entre 0 y 1}} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminado$$

e. Según la definición recién dada:
1º. Si A es un suceso cualquiera susceptible de ocurrir en la realización de un experimento aleatorio, se tiene que:

$$P(A) \geq 0 \qquad \mathbf{[I]}$$

2º. Como más arriba se dijo (**c** de NP I) el suceso E ocurre en toda realización de un experimento aleatorio, y por lo tanto será:

$$P(E) = 1 \qquad \mathbf{[II]}$$

3º. Por último, si $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes, designando como $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ el suceso consistente en que en la realización del experimento ocurra uno cualquiera de los sucesos $A_1, A_2, \ldots$, se tiene que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \frac{n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)}{N} = \frac{n_{A_1} + n_{A_2} + \ldots}{N} = \frac{n_{A_1}}{N} + \frac{n_{A_2}}{N} + \ldots = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Resumiendo:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } A_1, A_2, \ldots \text{ son mutuamente excluyentes se tiene que:} \\ \qquad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\end{array}\right\} \qquad \mathbf{[III]}$$

NP III

<u>Definición empírica de probabilidad (Von Mises)</u>

a. Sea un experimento aleatorio como por ejemplo tirar un dado o efectuar un tiro de ruleta. Considérese un suceso cualquiera que pueda ocurrir en la realización de dicho experimento. Según la definición empírica, la probabilidad de dicho suceso es su frecuencia relativa de aparición cuando se efectúa el experimento una sucesión infinita de veces.
Entonces, si en n experimentos aparece n_A veces el suceso A lo antedicho toma la forma:

$$P(A) = Probabilidad\ de\ A = \lim_{n\to\infty} f_A = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n} \qquad \textbf{[1]}$$

Para completar la definición, debe agregarse la condición de <u>aleatoridad</u>, consistente en que toda subsucesión infinita extraída al azar de la sucesión primitiva debe tener el mismo límite que ésta.

b. Desde un punto de vista práctico, esta definición es mucho más satisfactoria que la de Laplace, permitiendo ampliar notablemente el campo de acción de las probabilidades, pero desde un punto de vista conceptual tiene los siguientes vicios:

1º. En un sentido matemático riguroso, no puede asegurarse que el límite **[1]** exista. En efecto, según la definición de límite, se tiene por **[1]** que:

Dado un $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que para todo $n > N$ es $|P(A) - n_A / n| < \varepsilon$

y esto no se cumple en el campo de los fenómenos aleatorios ya que no se puede asegurar <u>con certeza</u> que al cabo de un número determinado de experimentos $P(A)$ y n_A / n diferirán en menos de un valor arbitrario. Así por ejemplo, es posible sacar 10000 caras en 10000 tiros de una moneda perfectamente simétrica.
Von Mises resolvió el problema postulando que en el universo físico existe siempre el límite **[1]**, con lo que el concepto empírico de la probabilidad se aparta algo de la realidad.

2º. Un estudio profundo de la naturaleza filosófica de esta definición (efectuado por A. Khinchin) llegó a demostrar que existe una incompatibilidad lógica entre la existencia del límite **[1]** y la condición de aleatoridad que constituye la 2ª parte de la definición.

Estas objeciones (sobre todo la 2ª) prácticamente invalidan a la definición empírica de probabilidad, la cual en la actualidad tiene sólo un interés histórico.

c. Según la definición recién dada:

1º. Si A es un suceso cualquiera susceptible de ocurrir en la realización de un experimento aleatorio, se tiene que:

$$P(A) \geq 0 \qquad \textbf{[I]}$$

2º. Como el suceso E ocurre en toda realización de un experimento aleatorio se tiene que:

$$P(E) = 1 \qquad \textbf{[II]}$$

3º. Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{A_1} + n_{A_2} + \ldots}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n_{A_1}}{n} + \frac{n_{A_2}}{n} + \ldots \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{A_1}}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n_{A_2}}{n} + \ldots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_{A_1} + \lim_{n\to\infty} f_{A_2} + \ldots = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Resumiendo:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } A_1, A_2, \ldots \text{ son mutuamente excluyentes se tiene que:} \\ \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots \end{array} \right\} \qquad \textbf{[III]}$$

d. Se introducirá acá el concepto de probabilidad condicional de un suceso con respecto a otro, lo que se hará mediante un ejemplo:

En Sudamérica se habla castellano y quechua además de otros idiomas (portugués, guaraní, etc.), habiendo muchos sudamericanos que son políglotas.

Sea un experimento aleatorio consistente en elegir un sudamericano al azar. Sean los sucesos:

C = {Sudamericanos que hablan castellano}

Q = {Sudamericanos que hablan quechua}

Entonces evidentemente será:

$C \cap Q$ = {Sudamericanos que a la vez hablan castellano y quechua}

Ver figura NP III. a.

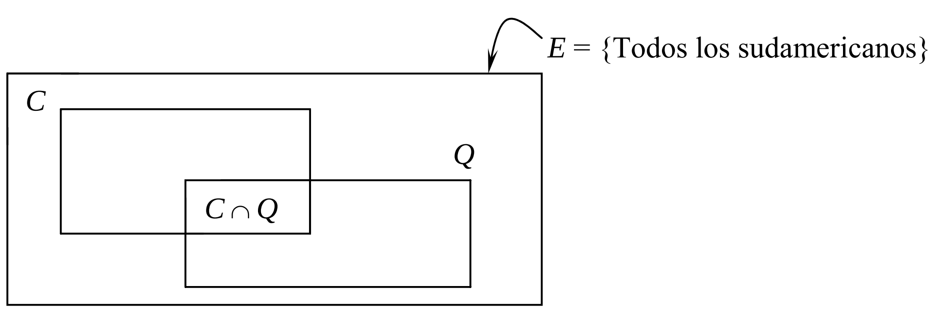

Fig. NP III.a

Supóngase que al sudamericano elegido se le pregunte si habla castellano y que conteste que sí. No se le pregunta si habla o no quechua.

Interesa ahora determinar que probabilidad existe de que dicha persona hable quechua, <u>con el conocimiento previo de que habla castellano</u>, es decir la probabilidad de que ocurra Q <u>sabiendo de que ocurrió C</u>.

Suponiendo de que se realice una cantidad n de repeticiones del experimento, según la definición empírica de probabilidad se tiene que:

Ver fig. NP III.a

$$P(Q/C) = P(ocurra\ \ Q\ \ habiendo\ \ ocurrido\ \ C) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_{(C\cap Q)}}{n_C} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n_{(C\cap Q)}}{n}}{\frac{n_C}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{(C\cap Q)}}{f_C} = \frac{\lim_{n\to\infty} f_{(C\cap Q)}}{\lim_{n\to\infty} f_C} = \frac{P(C\cap Q)}{P(C)}$$

En general:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } P(B) \neq 0: \\ P(A/B) = P(ocurrencia\ \ de\ \ A\ \ habiendo\ \ ocurrido\ \ B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \end{array}\right\} \quad \textbf{[2]}$$

Notar lo siguiente:

A/B <u>no</u> es en realidad un conjunto

La notación $P(A/B)$ (universalmente usada) corresponde a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurre B.

e. Se define que:
A y B son independientes cuando y sólo cuando $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$
Por **[2]** se tiene que si A y B son independientes:

$$\left.\begin{array}{ll} P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) & si\ \ P(B) \neq 0 \\ P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) & si\ \ P(A) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{[3]}$$

NP IV

<u>Tentativa de definición axiomática de probabilidad (Borel – Kolmogoroff)</u>

a. Según visto, la definición empírica de probabilidad es muy débil desde un punto de vista físico – filosófico, pero por otra parte ha podido verificarse en forma experimental que el mecanismo operativo a que conduce permite encarar con éxito una gran cantidad de problemas y obtener resultados útiles desde un punto de vista práctico.
Es decir que procediendo en forma pragmática no habría ningún inconveniente en usar esta definición empírica, pero quedaría el factor irritante de saber que todo está basado en algo que es falso.
La teoría axiomática de las probabilidades, de la cual se dará una idea a continuación, elude dicho factor irritante. Además, facilita mucho el manejo práctico de problemas.

b. Se empezará por dejar sentado que:
No existe en el mundo físico ninguna magnitud a la cual se le haya podido colgar el rótulo de probabilidad.
Esto es muy poco satisfactorio. Muchos físicos (entre otros Einstein) hicieron grandes esfuerzos para dar un significado físico a las probabilidades, pero siempre con resultados negativos.
Entonces, dada esta situación, la teoría de las probabilidades queda limitada al estudio de modelos matemáticos abstractos de los fenómenos aleatorios, modelos que no tienen ninguna "conexión física" con sus correspondientes fenómenos.
Dado un fenómeno aleatorio, la teoría axiomática de las probabilidades no tiene nada que ver con la definición de un modelo adecuado del mismo, definición que corre por exclusiva cuenta y riesgo del operador. Sólo una vez definido dicho modelo entrará en acción la teoría axiomática de las probabilidades con el fin de sacar conclusiones ulteriores.

c. Existen en la naturaleza numerosísimos fenómenos aleatorios (movimientos de las partículas de un gas, estados de los átomos, etc.) que siguen fielmente las leyes descriptas por "buenos" modelos de los mismos. Esto ocurre a pesar de que, tal como indicado más arriba, no exista ningún vínculo racional entre el fenómeno real y su modelo.
¿Cómo se explica esto?
En otras palabras: ¿Porqué los fenómenos aleatorios siguen ajustadamente las leyes dadas por "buenos" modelos de los mismos a pesar de que no exista ningún motivo físico para que así lo hagan?
La mejor respuesta a esta pregunta la dio J. von Neumann:
"Se trata de magia negra".

d. Según el enfoque axiomático de las probabilidades:
Dado un experimento aleatorio, un modelo probabilístico del mismo consiste en una lista completa de los sucesos que pueden ocurrir en su realización, y en un número sin significación asociado a cada uno de dichos sucesos.
Estos números serán llamados probabilidades, y serán arbitrarios dentro del requerimiento de tener que cumplir con las condiciones **I**, **II** y **III** indicadas en NP II y NP III.

e. Dado que según recién se dijo las probabilidades son, dentro de las condiciones **I**, **II** y **III**, números arbitrarios resulta que de un mismo experimento pueden construirse infinitos modelos.
Entre estos infinitos modelos habrá algunos que, desde un punto de vista utilitario serán "buenos" y otros que serán "malos", siendo un modelo tanto mejor cuanto más se aproxime a ser un "reflejo fiel" de la realidad del experimento aleatorio.
Por ejemplo, sea el experimento consistente en un tiro de moneda. Los posibles resultados serán "sacar cara" o "sacar ceca". La lista de los sucesos que pueden ocurrir son:

"Sacar cara" "Sacar ceca" y "Sacar cara o ceca" $= E$ **[1]**

siendo "Sacar cara" y "Sacar ceca" los únicos sucesos mutuamente excluyentes que pueden ocurrir.
Se establecerá tentativamente:

Modelo A : $P(\text{Sacar cara}) = \dfrac{1}{2}$; $P(\text{Sacar ceca}) = \dfrac{1}{2}$; $P(\text{Sacar cara o ceca}) = 1$

Esta asignación de probabilidades constituye en efecto, un modelo ya que, según es evidente, se cumplen las condiciones **I** y **II**, y además, como:

$$E = \text{“Sacar cara o ceca”} = \text{“Sacar cara”} \cup \text{“Sacar ceca”}$$

y como:

$$P(\text{Sacar cara o ceca}) = P(E) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = P(\text{Sacar cara}) + P(\text{Sacar ceca})$$

se tiene que también se cumple la condición **III**.

También hubiera podido establecerse que:

Modelo B : $P(\text{Sacar cara}) = \frac{1}{4}$; $\quad P(\text{Sacar ceca}) = \frac{3}{4}$; $\quad P(\text{Sacar cara o ceca}) = 1$

ya que, según puede verificarse, esta asignación de probabilidades también cumple con las antedichas condiciones **I**, **II** y **III**.

Estos modelos *A* y *B* corresponden ambos a un mismo experimento. El modelo *A* será un “reflejo fiel” de la realidad en el caso de una moneda perfectamente equilibrada, en cuyo caso el modelo *B* será muy malo (pero desde un punto de vista formal será tan modelo como el *A*).

Notar que en el caso de un tiro a cara o ceca entre dos amigos para ver quién paga el café, la moneda utilizada será una moneda ordinaria que casi con seguridad no está perfectamente equilibrada. En este caso ambos amigos aceptan implícitamente el modelo *A*, a pesar de que no es un reflejo absolutamente fiel a la realidad. Este es un caso corriente en la aplicación de la teoría de las probabilidades, donde a menudo por razones prácticas en vez de un “reflejo absolutamente fiel”, difícil o imposible de hallar, se usa un “reflejo suficientemente fiel”.

Surge ahora una cuestión de orden práctico: Aceptado el enfoque axiomático, ¿cómo se hace para definir el modelo adecuado de un cierto experimento concreto, definición que, según se dijo, queda por cuenta y riesgo del operador?.

Para empezar, se hace notar que no se está en peor situación que con las otras definiciones. Si el experimento es simétrico, puede establecerse que todos los posibles resultados son equiprobables, cayéndose así en un modelo que será igual al dado por la definición de Laplace. Si se dispone de abundantes datos experimentales, puede establecerse que la probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa de su aparición, cayéndose así en un modelo que será similar al dado por la definición empírica de von Mises. Lo importante es darse cuenta de que con el enfoque axiomático los valores así hallados son en efecto probabilidades no debido a razones físicas sino que lo son por “decreto” del operador. Si estos valores son malos, el responsable del ulterior fracaso será el operador, no pudiendo éste descargar dicha responsabilidad sobre ninguna definición.

Evidentemente, además de los procedimientos enunciados (que son de lejos los más usuales), el operador está en libertad de acción para usar cualquier otro método que le parezca adecuado para definir un modelo.

NP V

Distribución de probabilidades

a. **Definición**

Sea un experimento aleatorio cuyo universo sea E.

Se dirá que sobre E se efectúa una distribución de probabilidad, a la que se indicará como D_E, cuando a todos los subconjuntos $A \subset E$ (sucesos de E) se les asignen números arbitrarios $P(A)$ llamados probabilidades tales que cumplan con las siguientes condiciones:

1º) $P(A) \geq 0$, $\forall A \subset E$ (Condición I)

2º) $P(E) = 1$ (Condición II)

3º) Si $A_1, A_2, \dots$ es una cantidad finita o infinidad numerable de sucesos mutuamente excluyentes se tiene que: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ (Condición III)

[1]

b. Evidentemente, sobre un mismo E pueden efectuarse distintas distribuciones de probabilidad ya que los números $P(A)$ son arbitrarios a condición de cumplir con las condiciones I, II y III indicadas en **[1]**.

A cada una de estas posibles distintas distribuciones corresponde un modelo probabilístico del experimento.

c. El establecimiento de una distribución de probabilidad sobre un cierto E equivale a la definición de una función de conjunto ya que a cada $A \subset E$ se le hace corresponder un <u>número</u> (los valores de la “variable independiente” son los sucesos $A \subset E$, y los valores de la “variable dependiente” son los números llamados probabilidades).

NP VI

Consecuencias directas de la definición

a. Como:

$$A \cup \overline{A} = E \quad \text{y} \quad A \cap \overline{A} = \varnothing \quad (A \text{ y } \overline{A} \text{ mutuamente excluyentes})$$

por las condiciones II y III indicadas en **[1]** de NP V, se tiene que:

$$1 = P(E) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \qquad \textbf{[1]}$$

y por lo tanto resulta que:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) \qquad \textbf{[2]}$$

y, como caso particular:

$$P(\varnothing) = 1 - P(\overline{\varnothing}) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

b. Como por la condición I de **[1]** de NP V es $P(A) \geq 0$ y $P(\overline{A}) \geq 0$, entonces por lo indicado en **[2]** resulta que:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq P(\overline{A}) \leq 1 \qquad \textbf{[4]}$$

Es decir que toda probabilidad es un número real, no negativo y menor o igual que uno.

c. Sean A y B dos sucesos cualesquiera (mutuamente excluyentes o no mutuamente excluyentes).
Se tiene que:

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$$

siendo $(A \cap B)$, $(A \cap \overline{B})$ y $(\overline{A} \cap B)$ sucesos mutuamente excluyentes ya que la intersección de dos cualesquiera de ellos es igual a $\varnothing$.
Entonces:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = \\ &= [P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})] + [P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)] - P(A \cap B) = \\ &= P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] + P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)] - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Resumiendo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \textbf{[5]}$$

Observar que si fueran A y B mutuamente excluyentes, es decir si fuera $A \cap B = \varnothing$, lo que implica que sea $P(A \cap B) = 0$, la fórmula **[5]** se transformaría en la condición III de **[1]** de NP V para el caso particular de 2 sucesos.

NP VII

Distribuciones condicionales

a. Sea una distribución de probabilidad D_E efectuada sobre un universo E.
Sean P(Suceso) las probabilidades asignadas por esa D_E. Sea un $B \subset E$ cualquiera tal que $P(B) \neq 0$. Sea A otro suceso cualquiera de E.
Supóngase que al conjunto $A \cap B$ se le asocie un número (al que todavía no se le llamará probabilidad) dado por la fórmula:

$$P(A/B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & Si \;\; P(B) \neq 0 \\ Indefinido & Si \;\; P(B) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{[1]}$$

b. Se verificará a continuación que esta expresión **[1]** define una distribución de probabilidad sobre B a la que llamará D_B.

Para efectuar dicha verificación se comprobará que los números definidos según **[1]** cumplen con las condiciones indicadas en **[1]** de NP V cuando se considere a B como universo.

En efecto:

1º) Como $P(A \cap B) \geq 0$ y $P(B) > 0$ se tiene que:

$$P\left(A/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \qquad \text{(Condición I de } \mathbf{[1]} \text{ de NP V cumplida)}$$

2º) $P\left(B/_{B}\right) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ (Condición II de **[1]** de NP Vcumplida)

3º) Si $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes:

$$P\left[(A_1 \cup A_2 \cup \quad)/_{B}\right] = \frac{P[(A_1 \cup A_2 \cup \quad) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \quad]}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \quad}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} + \quad = P\left(A_1/_{B}\right) + P\left(A_2/_{B}\right) +$$

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), \ldots$ son mutuamente excluyentes por serlo $A_1, A_2, \ldots$

Resumiendo:

Si $A_1, A_2, \ldots$ son mutuamente excluyentes entonces:

$$P\left[(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)/_{B}\right] = P\left(A_1/_{B}\right) + P\left(A_2/_{B}\right) + \ldots \qquad \text{(Condición III de } \mathbf{[1]} \text{ de NP V cumplida)}$$

A la distribución D_B se le llamará distribución condicional de D_E con respecto a B.

NP VIII

<u>Probabilidad compuesta</u>

De **[1]** de NP VII surge que:

$$P(A \cap B) = P\left(A/_{B}\right) P(B) \qquad \text{si} \qquad P(B) \neq 0$$

Igualmente:

$$P(B \cap A) = P\left(B/_{A}\right) P(A) \qquad \text{si} \qquad P(A) \neq 0$$

[1]

Estos resultados pueden ser generalizados. Así, por ejemplo:

$$P(A \cap B \cap C) = P\left(A/_{B \cap C}\right) P(B \cap C) = P\left(A/_{B \cap C}\right) P\left(B/_{C}\right) P(C)$$

si $P(B \cap C) \neq 0$ y $P(C) \neq 0$

[2]

NP IX

Sucesos independientes

a. Sea una distribución D_E definida sobre un universo E.

Sean los sucesos A, B, …, N. Se define que estos sucesos son todos independientes entre sí cuando y solo cuando:

$$P(A \cap B \cap \ldots \cap N) = P(A)\, P(B)\, \ldots\, P(N) \qquad \textbf{[1]}$$

Como caso particular, los sucesos A y B son independientes entre sí cuando y solo cuando:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \qquad \textbf{[2]}$$

b. Se hace notar que puede darse el caso de que tres o más sucesos sean de a pares independientes entre sí y sin embargo no sean todos independientes entre sí.

Por ejemplo, sean cuatro cartones a los que se numerará 1, 2, 3 y 4.

Supóngase que los cartones 1, 2 y 3 estén pintados respectivamente de azul, blanco y colorado y que el cartón 4 tenga 3 sectores pintados respectivamente de azul, blanco y colorado.

Sean los sucesos:

A = Al extraer un cartón al azar se ve el color azul.

B = Al extraer un cartón al azar se ve el color blanco.

C = Al extraer un cartón al azar se ve el color colorado.

I = Se extrae el cartón 1.

II = Se extrae el cartón 2.

III = Se extrae el cartón 3.

IV = Se extrae el cartón 4.

Evidentemente y como la extracción de cartones es al azar cabe definir:

$$\mathrm{P(I)} = \mathrm{P(II)} = \mathrm{P(III)} = \mathrm{P(IV)} = \tfrac{1}{4}$$

Como I, II, III y IV son mutuamente excluyentes se tiene que:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P(I \cup IV)} = \mathrm{P(I)} + \mathrm{P(IV)} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

e igualmente:

$$\mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{2}$$

Además y como la única manera que salgan dos colores es extrayendo el cartón 4, se tiene que:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A \cap C) = \mathrm{P}(B \cap C) = \mathrm{P(IV)} = \tfrac{1}{4}$$

y entonces resulta que A y B son independientes entre sí ya que:

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\, \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Igualmente se tiene que son independientes entre sí A y C por una parte y B y C por otra.

Pero como:

$P(A \cap B \cap C) = P(IV) = 1/4$ y $P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C) = (1/2)^3 = 1/8$

resulta que:

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\, P(B)\, P(C)$$

y por lo tanto A, B y C no son todos independientes entre sí.

c. Si A y B son independientes:

$$\left.\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \quad \text{si } P(B)\neq 0 \\ P(B/A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B) \quad \text{si } P(A)\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad \textbf{[3]}$$

d. Si A y B son independientes:

$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A)\, P(B) + P(A \cap \overline{B})$

y entonces:

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B})$ **[4]**

teniéndose así que si A y B son independientes entonces A y $\overline{B}$ también lo son.

Si $P(B) \neq 0$ y $P(\overline{B}) \neq 0$ se tiene entonces que:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \quad ; \qquad P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A)$$

Es decir que:

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A)$$

si A y B son independientes y $P(B) \neq 0$ y $P(\overline{B}) \neq 0$ **[5]**

e. <u>Si A y B son independientes y $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$</u> entonces:

$P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{>0}\ \underbrace{P(B)}_{>0} > 0$ y por lo tanto debe ser $A \cap B \neq \varnothing$ lo que implica que <u>A y B no sean mutuamente excluyentes</u>.

f. <u>Si A y B son mutuamente excluyentes y $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$</u> entonces $A \cap B \neq \varnothing$ y por lo tanto $\underbrace{P(A \cap B)}_{0} \neq \underbrace{P(A)}_{>0}\ \underbrace{P(B)}_{>0}$ lo que implica que <u>A y B no sean independientes</u>.

g. Puede darse el caso de que siendo $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$ se tenga que <u>A y B no sean ni mutuamente excluyentes ni independientes</u>.

Por ejemplo: Sea un examen de álgebra y biología.

Sean: A = Aprobar álgebra ; B = Aprobar biología

$P(A \cap B)$ = P(Aprobar álgebra y biología) = 0,4
$P(A \cap \overline{B})$ = P(Aprobar álgebra y no biología) = 0,2
$P(\overline{A} \cap B)$ = P(No aprobar álgebra y sí biología) = 0,3
$P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = P(No aprobar ni álgebra ni biología) = 0,1

Entonces:

1º. Como $P(A \cap B) = 0{,}4$ entonces $A \cap B \neq \varnothing$ y por lo tanto A y B no son mutuamente excluyentes.

2º. $$P(A) = P[A \cap (B \cup \overline{B})] = P[\underbrace{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}_{\text{Mutuamente excluyentes}}] = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$$

$$P(B) = P[B \cap (A \cup \overline{A})] = P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$$

y como $\underbrace{P(A \cap B)}_{0,4} \neq \underbrace{P(A)}_{0,6} \cdot \underbrace{P(B)}_{0,7}$ resulta que A y B tampoco son independientes.

h. Puede demostrarse fácilmente que para que A y B sean a la vez independientes y mutuamente excluyentes debe ser $P(A) = 0$ y/o $P(B) = 0$.

NP X

<u>Aplicaciones</u>

NP X.1

a. Se tiran simultáneamente un dado y una moneda. Indicar la probabilidad de obtener una cara con la moneda y un número impar con el dado.

b. $$\mathrm{P(cara} \cap \mathrm{impar)} = \mathrm{P}[\underbrace{\mathrm{cara} \cap (1 \cup 3 \cup 5)}_{\text{Independientes}}] = \mathrm{P(cara)P}(\underbrace{1 \cup 3 \cup 5}_{\text{Mutuamente excluyentes}}) = \mathrm{P(cara)[P(1) + P(3) + P(5)]}$$

Suponiendo un modelo probabilístico tal que sacar cara y seca sean equiprobables, y que todos los resultados del tiro de dado sean también equiprobables se tiene que:

$$P(\text{cara} \cap \text{impar}) = P(\text{cara})\,[P(1) + P(3) + P(5)] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{1}{4}$$

NP X.2

a. Se tiran dos dados y se suman los resultados obtenidos. Indicar la probabilidad de que dicha suma sea 4 ó 9.

b. Se supone un modelo probabilístico tal que todos los resultados obtenidos con cada dado sean equiprobables.

$$P(\text{Suma} = 4) = P[\underbrace{(1_{D_1} \cap 3_{D_2}) \cup (2_{D_1} \cap 2_{D_2}) \cup (3_{D_1} \cap 1_{D_2})}_{\text{Mutuamente excluyentes}}] =$$

$$= P(\underbrace{1_{D_1} \cap 3_{D_2}}_{\text{Independientes}}) + P(\underbrace{2_{D_1} \cap 2_{D_2}}_{\text{Independientes}}) + P(\underbrace{3_{D_1} \cap 1_{D_2}}_{\text{Independientes}}) =$$

$$= P(1_{D_1})P(3_{D_2}) + P(2_{D_1})P(2_{D_2}) + P(3_{D_1})P(1_{D_2}) =$$

$$= \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{36}$$

Igualmente:

$$P(\text{Suma} = 9) = P(3_{D_1})P(6_{D_2}) + P(4_{D_1})P(5_{D_2}) + P(5_{D_1})P(4_{D_2}) + P(6_{D_1})P(3_{D_2}) =$$

$$= \tfrac{4}{36}$$

y entonces:

$$P(\underbrace{\text{Suma} = 4 \cup \text{Suma} = 9}_{\text{Mutuamente excluyentes}}) = P(\text{Suma} = 4) + P(\text{Suma} = 9) = \tfrac{3}{36} + \tfrac{4}{36} = \tfrac{7}{36}$$

NP X.3

a. Se extrae una carta de un mazo de barajas españolas. Indicar la probabilidad de que dicha carta sea un basto o una sota.

b. Se supone un modelo probabilístico tal que todas las 40 cartas tengan la misma probabilidad de ser extraídas.

$$P(B \cup S) = P(B) + P(S) - P(B \cap S)$$

Como hay 40 cartas y 10 bastos se tiene que $P(B) = \dfrac{10}{40}$

Como hay 40 cartas y 4 sotas se tiene que $P(S) = \dfrac{4}{40}$

$B \cap S$ = Sota de bastos. Entonces P $(B \cap S) = \dfrac{1}{40}$

Entonces:

$$P(B \cup S) = \frac{10}{40} + \frac{4}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

NP X.4

a. La bolsa V contiene 3 bolas azules, 7 blancas y 15 coloradas.
La bolsa W contiene 10 bolas azules, 6 blancas y 9 coloradas.
Se pide hallar la probabilidad de que al extraer una bola de cada bolsa, las dos resulten del mismo color.

b. Se supone un modelo probabilístico tal que todas las bolas de una misma bolsa tengan la misma probabilidad de ser extraídas.

$$P(\text{Igual color}) = P[\underbrace{(A_V \cap A_W) \cup (B_V \cap B_W) \cup (C_V \cap C_W)}_{\text{Mutuamente excluyentes}}] =$$

$$= P(\underbrace{A_V \cap A_W}_{\text{Independientes}}) + P(\underbrace{B_V \cap B_W}_{\text{Independientes}}) + P(\underbrace{C_V \cap C_W}_{\text{Independientes}}) =$$

$$= P(A_V)P(A_W) + P(B_V)P(B_W) + P(C_V)P(C_W) =$$

$$= \frac{3}{25} \cdot \frac{10}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{6}{25} + \frac{15}{25} \cdot \frac{9}{25} = \frac{207}{625}$$

NP X.5

a. Sea una bolsa con 10 cartones numerados de 1 a 10. Uno a uno se extraen 3 cartones. Se pide hallar la probabilidad de que todos los cartones extraídos tengan un número inferior a 6.

b. Se supone un modelo probabilístico tal que todos los cartones todavía no extraídos tengan la misma probabilidad de ser extraídos en la próxima extracción.

$$P(\text{Todos menores que } 6) = P(1^o < 6 \cap 2^o < 6 \cap 3^o < 6) =$$

$$= P\left(3^o < 6 \big/ 2^o < 6 \cap 1^o < 6\right) P\left(2^o < 6 \big/ 1^o < 6\right) P(1^o < 6)$$

Como inicialmente en la bolsa hay 10 cartones, de los cuales 5 son menores que 6 se tiene que

$$P(1^o < 6) = \frac{5}{10}$$

Si se extrae un número menor que 6 en la primera extracción, para la segunda extracción quedan 9 cartones de los cuales 4 son menores que 6.
Entonces será:

$$P\left(2^o < 6 \big/ 1^o < 6\right) = \frac{4}{9}$$

Si en las extracciones primera y segunda se han sacado números menores que 6, para la tercera extracción quedan 8 cartones de los cuales 3 son menores que 6.
Entonces será:

$$P\left(3^o < 6 \big/ 2^o < 6 \cap 1^o < 6\right) = \frac{3}{8}$$

y por lo tanto:

$$P(\text{Todos menores que 6}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{10} = \frac{1}{12}$$

NP X.6

a. Se pide demostrar que:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C)$

b. En efecto:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[A \cup (B \cup C)] = P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)] = \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

NP X.7

a. Sean 3 cartones sobre los cuales están escritos los números 1, 2 y 3 respectivamente. Supóngase que dichos cartones se vayan sacando uno por uno al azar de una bolsa y que se anote el orden de aparición de los números escritos sobre los mismos. Se pide indicar la probabilidad de que por lo menos en un caso el orden de extracción del cartón coincida con el número escrito sobre el mismo (por ejemplo que el cartón numerado 2 aparezca en la segunda extracción).

b. Evidentemente:
E = {Las 3! Permutaciones de los 3 cartones}
Se supone un modelo probabilístico tal que los 3! elementos de E sean equiprobables.
Sean los sucesos
$1_{1°}$ = El cartón numerado 1 apareció en primer lugar.
$2_{2°}$ = El cartón numerado 2 apareció en segundo lugar.
$3_{3°}$ = El cartón numerado 3 apareció en tercer lugar.
Entonces:

$$P(1_{1°} \cup 2_{2°} \cup 3_{3°}) \overset{\text{Ver NP X.6}}{=} P(1_{1°}) + P(2_{2°}) + P(3_{3°}) - [P(1_{1°} \cap 2_{2°}) + P(1_{1°} \cap 3_{3°}) + P(2_{2°} \cap 3_{3°})] + P(1_{1°} \cap 2_{2°} \cap 3_{3°})$$

Evidentemente:

$$P(1_{1°}) = P(2_{2°}) = P(3_{3°}) = 1/3$$

$$P(1_{1°} \cap 2_{2°}) = P\left(2_{2°}/1_{1°}\right)P(1_{1°}) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$$

Igualmente:

$$P(1_{1°} \cap 3_{3°}) = P(2_{2°} \cap 3_{3°}) = 1/6$$

$$P(1_{1°} \cap 2_{2°} \cap 3_{3°}) = P\left(3_{3°}/2_{2°} \cap 1_{1°}\right)P\left(2_{2°}/1_{1°}\right)P(1_{1°}) = 1 \cdot 1/2 \cdot 1/3 = 1/6$$

y entonces:

$$P(1_{1°} \cup 2_{2°} \cup 3_{3°}) = 1 - 3 \cdot 1/6 + 1/6 = 2/3$$

NP X.8

a. En un stock muy grande de lámparas, el 70% ha sido fabricado por la fábrica X y el 30% por la Y. Entre las lámparas fabricadas por X el 90% resultan buenas (duran por lo menos una cierta cantidad predeterminada de horas); y entre las lámparas fabricadas por Y solo el 80% resultan buenas.
Tomando al azar una lámpara del stock, indicar la probabilidad de que resulte buena.

b. Se supone una distribución probabilística tal que todas las lámparas del stock tienen la misma probabilidad de ser elegidas.
Sean los sucesos:
B = La lámpara resultó buena.
$\overline{B}$ = La lámpara resultó mala.
X = La lámpara proviene del fabricante X.
Y = La lámpara proviene del fabricante Y.

Evidentemente:
$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}[B \cap (X \cup Y)] = \mathrm{P}[\underbrace{(B \cap X) \cup (B \cap Y)}_{\text{Mutuamente excluyentes}}] = \mathrm{P}(B \cap X) + \mathrm{P}(B \cap Y) =$$

$$= \mathrm{P}\left(B/X\right)\mathrm{P}(X) + \mathrm{P}\left(B/Y\right)\mathrm{P}(Y) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}87$$

NP X.9

a. Sean las mismas condiciones de contorno del ejercicio NP X.8.
Se pide indicar la probabilidad de que al tomar dos lámparas del stock una resulte buena y la otra mala.

b. Sean los sucesos:
B_1 = La primer lámpara resultó buena.
$\overline{B}_1$ = La primer lámpara resultó mala.
B_2 = La segunda lámpara resultó buena.
$\overline{B}_2$ = La segunda lámpara resultó mala.
X = La lámpara (la primera y/o la segunda) proviene del fabricante X.
Y = La lámpara (la primera y/o la segunda) proviene del fabricante Y.
Se tiene que:
$$\mathrm{P}[\underbrace{(B_1 \cap \overline{B}_2) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2)}_{\text{Mutuamente excluyentes}}] = \mathrm{P}(\underbrace{B_1 \cap \overline{B}_2}_{\text{Independientes}}) + \mathrm{P}(\underbrace{\overline{B}_1 \cap B_2}_{\text{Independientes}}) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(\overline{B}_2) + \mathrm{P}(\overline{B}_1)\mathrm{P}(B_2)$$
y como evidentemente:
$$\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(\underbrace{\text{extraer una buena}}_{\text{B}}) = \mathrm{P}(B)$$

$$\mathrm{P}(\overline{B}_1) = \mathrm{P}(\overline{B}_2) = \mathrm{P}(\overline{B}) = 1 - \mathrm{P}(B)$$

resulta que:

Ver NP X.8

$$\mathrm{P}[(B_1 \cap \overline{B}_2) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2)] = 2\,\mathrm{P}(B)\,[1 - \mathrm{P}(B)] = 2 \cdot 0{,}87\,(1 - 0{,}87) = 0{,}2132$$

NP X.10

a. Un obrero atiende tres telares. Supóngase que las probabilidades de que respectivamente requieran atención durante 1 hora sean 0,1 ; 0,2 y 0,15.
Se pide hallar la probabilidad de que <u>por lo menos</u> un telar <u>no</u> requiera atención durante una hora.

b. Sean los sucesos
A_1 = El telar 1 requiere atención.
A_2 = El telar 2 requiere atención.
A_3 = El telar 3 requiere atención.

Entonces:

P(Por lo menos uno <u>no</u> requiere atención) =

$$= 1 - \text{P(los tres requieren atención)} = 1 - \text{P}(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3}_{\text{Independientes}}) =$$

$$= 1 - \text{P}(A_1)\text{P}(A_2)\text{P}(A_3) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}997$$

NP X.11

a. Sea un suceso A cuya probabilidad de ocurrencia en un experimento aislado sea p.
Se pide hallar la probabilidad de que en n experimentos independientes A ocurra exactamente i veces.

b. A fin de fijar ideas, supóngase que sea $n = 5$ y $i = 3$.
Las maneras como puede ocurrir que en 5 experimentos A ocurra exactamente 3 veces son:

Experimento →	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
	A	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$
	A	A	$\overline{A}$	A	$\overline{A}$
	A	$\overline{A}$	A	A	$\overline{A}$
	$\overline{A}$	A	A	A	$\overline{A}$
	A	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$	A
	A	$\overline{A}$	A	$\overline{A}$	A
	$\overline{A}$	A	A	$\overline{A}$	A
	A	$\overline{A}$	$\overline{A}$	A	A
	$\overline{A}$	A	$\overline{A}$	A	A
	$\overline{A}$	$\overline{A}$	A	A	A

$\binom{5}{3}$ = 10 maneras distintas

Considérese la primer manera:
Como los experimentos son todos independientes entre sí se tiene que:

$$\text{P}(A_{1^o} \cap A_{2^o} \cap A_{3^o} \cap \overline{A}_{4^o} \cap \overline{A}_{5^o}) = \text{P}(A_{1^o})\,\text{P}(A_{2^o})\,\text{P}(A_{3^o})\,\text{P}(\overline{A}_{4^o})\,\text{P}(\overline{A}_{5^o}) =$$
$$= p\,p\,p\,(1-p)\,(1-p) = p^3\,(1-p)^2$$

Evidentemente, para cada una de las restantes maneras se obtendrá la misma probabilidad, y como todas las maneras son mutuamente excluyentes resulta que:

$P(A \text{ ocurra 3 veces en 5 experimentos}) = \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2$

c. Evidentemente el razonamiento recién hecho para el caso particular $n = 5$, $i = 3$ es extensible al caso genérico, obteniéndose que:

$$P(A \text{ ocurra } i \text{ veces en } n \text{ experimentos}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

NP XI

Teorema de Bayes

NP XI.1

a. Se empezará con un ejemplo.
Sean dos máquinas m_1 y m_2 que producen respectivamente el 70% y el 30% de la totalidad de los tornillos hechos en una fábrica.
Supóngase que los porcentajes de tornillos buenos fabricados por m_1 y m_2 sean respectivamente el 90% y el 80%.

Se elige un tornillo al azar de la producción total. Si se lo prueba y resulta bueno, se pide indicar la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina m_1.

b. Sean los sucesos:
B = El tornillo probado resultó bueno.
M_1 = El tornillo probado fue fabricado por la máquina m_1.
M_2 = El tornillo probado fue fabricado por la máquina m_2.
Evidentemente, lo que se pide es hallar la probabilidad $\mathrm{P}\left(M_1 / B \right)$.

Se tiene que:

$$\mathrm{P}\left(M_1 / B \right) = \frac{P(M_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M_1 \cap B)}{P[B \cap \underbrace{(M_1 \cup M_2)}_{\text{Mutuamente excluyentes}}]} = \frac{P(M_1 \cap B)}{P[\underbrace{(B \cap M_1) \cup (B \cap M_2)}_{\text{Mutuamente excluyentes}}]} =$$

$$= \frac{P(M_1 \cap B)}{P(B \cap M_1) + P(B \cap M_2)} = \frac{P\left(B / M_1 \right) P(M_1)}{P\left(B / M_1 \right) P(M_1) + P\left(B / M_2 \right) P(M_2)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}7}{0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3} = \frac{21}{29}$$

c. Generalizando:
Sea un suceso B cuya ocurrencia implica necesariamente la ocurrencia de uno (y uno solo) de los sucesos <u>mutuamente excluyentes</u> $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Supóngase que interese conocer la probabilidad de que habiéndose producido B se haya producido uno de los $A_1, A_2, \ldots, A_n$ <u>determinado</u>.
Razonando tal como indicado en **a.** y **b.** se obtiene que:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_i)P(A_i) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)}$$

NP XI.2

Aplicación

a. Supóngase que la probabilidad de que una persona de una cierta población esté afectada de dengue sea igual a 0,0001.
Sea un análisis que con una confiabilidad igual a 0,99 pretenda indicar si una cierta persona está o no enferma de dengue.
Se pide la probabilidad de que una persona cuyo análisis dio positivo esté en realidad sana.

b. Para empezar el hecho de que la confiabilidad del análisis sea 0,99 implica que existe una probabilidad igual a 0,01 de que un enfermo sea declarado sano o de que una persona sana sea declarada enferma.
Sean los sucesos:
D = La persona analizada está enferma.
A = El análisis dio positivo.
Entonces, la probabilidad pedida es:

$$\mathrm{P}\left(\overline{D}/A\right) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P\left[A \cap (D \cup \overline{D})\right]} = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P\left[(A \cap D) \cup (A \cap \overline{D})\right]} =$$

$$= \frac{P(A \cap \overline{D})}{P(A \cap \overline{D}) + P(A \cap D)} = \frac{P\left(A/\overline{D}\right)P(\overline{D})}{P\left(A/\overline{D}\right)P(\overline{D}) + P\left(A/D\right)P(D)} =$$

$$= \frac{0{,}01 \cdot \left[1 - 0{,}0001\right]}{0{,}01 \cdot (1 - 0{,}0001) + 0{,}99 \cdot 0{,}0001} = 0{,}99$$

Se llega así al sorprendente resultado de que una persona cuyo análisis dio positivo tenga una probabilidad igual a 0,99 de estar en realidad sana.

NP XII

Resumen de principales fórmulas

$P(A) \geq 0$

$P(E) = 1$

$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$ si $A_1, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ si A y B cualesquiera

$$P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B) \neq 0$$

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A) \neq 0$$

Si $A_1, \ldots, A_n$ son independientes entonces es: $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n)$

$P(A \cap B) = P\left(A/B\right) P(B) = P\left(B/A\right) P(A)$ si $P(B) \neq 0$ y $P(A) \neq 0$

$P(A \cap B \cap C) = P\left(A/B \cap C\right) P\left(B/C\right) P(C)$ si $P(B \cap C) \neq 0$ y $P(C) \neq 0$

Fórmula de Bayes:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(B/A_1)P(A_1) + \ldots + P(B/A_i)P(A_i) + \ldots + P(B/A_n)P(A_n)}$$

si $A_1, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes y $A_1 \cup \ldots \cup A_n = E$.

NP XIII

<u>Observación</u>:

a. En el caso de universos infinitos pueden presentarse subconjuntos de E (sucesos) que no cumplen con las condiciones fundamentales indicadas en (1) de NP V.
Esta circunstancia parecería implicar que el edificio de la teoría axiomática de las probabilidades se derrumba apenas iniciado.
Pero felizmente, puede probarse que, dado un universo E cualquiera, existe una categoría muy amplia de subconjuntos de E, llamados conjuntos de Borel, para lo cuales sí se cumplen las antedichas condiciones fundamentales.
Por lo tanto, si la asignación de probabilidades se restringe a los $A \subset E$ que son conjuntos de Borel se habrá salvado la teoría.
Entonces, para estar en terreno totalmente firme habría que indicar en las condiciones fundamentales dadas en (1) de NP V que son válidas únicamente para sucesos que son conjuntos de Borel.

b. Para tranquilidad del lector se dirá que prácticamente todos los sucesos que aparecen en la vida diaria son conjunto de Borel, así que, desde un punto de vista utilitario la existencia de conjuntos no borelianos no presenta mayores inconvenientes.
Así por ejemplo, si un experimento de respuesta numérica (o codificable numéricamente) tiene un universo $E = \left] -\infty, \infty \right[$, puede demostrarse que en este caso todos los posibles intervalos de E (de cualquier tipo) y todos los resultados de unir, intersectar, o complementar una cantidad finita o infinidad numerable de los mismos son conjuntos de Borel.

c. La existencia de conjuntos no borelianos obligó a efectuar una redefinición completa de la teoría axiomática de las probabilidades, lo que fue hecho por el francés Emile Borel y el ruso A. Kolmogoroff.
Para un desarrollo completo de la teoría axiomática de las probabilidades, ver:
- H. Cramer "Teoría Matemática de la Estadística" Ed. Aguilar.
- D. Dugué "Ensambles Mesurables et Probabilites" Ed. Dunod.

Ejercicios sobre probabilidad elemental

NP 1 Indicar la probabilidad de sacar una flor jugando al truco.

NP 2 Sean 6 celdas I, II, III, IV, V y VI y 6 bolillas. Cada bolilla es ubicada en una celda según el resultado de un tiro de dado. Indicar la probabilidad de que en cada celda haya una sola bolilla.

NP 3 Sea un edificio con planta baja y 6 pisos. Un ascensor sale de la planta baja con 4 pasajeros. Indicar la probabilidad de que en ningún piso bajen dos ó más personas.

NP 4 Sea un conjunto de 100 personas. Indicar la probabilidad de que no haya 2 ó más personas que cumplan años el mismo día.

NP 5 Se sacan cartas una tras otra de un mazo de barajas españolas. Indicar la probabilidad de que el primer as salga después de la décima extracción.

NP 6 Sea un mazo de barajas francesas (52 cartas y 4 palos). Indicar la probabilidad de que al extraer 5 cartas se obtenga un "full" servido ("full" ≡ 3 cartas de un mismo valor y 2 cartas de un mismo otro valor).

NP 7 Sean dos tiros consecutivos de un dado. Hallar la probabilidad de obtener:
a) Ningún as
b) Ningún as y ningún 2

NP 8 El 60% de los argentinos es dolicocéfalo, el 30% es hipertenso y el 20 % son las dos cosas. Indicar la probabilidad de que un argentino tomado al azar sea dolicocéfalo y no hipertenso.

NP 9 Se reparten las 40 cartas de una baraja española entre 4 jugadores A, B, C y D. Suponiendo que entre A y B tengan 6 oros, indicar la probabilidad de que C ó D no tengan ningún oro.

NP 10 Sea una bolsa V_1 con 3 bolillas azules y una blanca, y sea otra bolsa V_2 con 2 azules y una blanca. Se pasa una bolilla de V_1 a V_2 sin mirarla y luego se extrae una bolilla de V_2. Indicar la probabilidad de que esta bolilla sea azul.

NP 11 Sea una bolsa V_1 con a bolillas azules y b blancas. Se sacan bolas hasta que en la bolsa queden solo bolillas de un mismo color. Indicar la probabilidad de que éstas sean blancas.

NP 12 Sea la ecuación $x^2 + 2bx + c = 0$. Supóngase que los coeficientes b y c hayan sido obtenidos tirando un dado. Indicar la probabilidad de que resulte $b^2 \geq c$, es decir de que sean reales las raíces de la ecuación.

NP 13 Por efecto del cansancio visual, la probabilidad que un tirador tiene de pegar en el blanco disminuye un 10% de tiro a tiro.
Suponiendo que tiene una probabilidad del 70% de hacer blanco en el primer tiro, indicar la probabilidad de que el tirador acierte exactamente 2 veces en el blanco al tirar 3 tiros.

NP 14 Demostrar que si A y B son independientes y $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$ entonces también son independientes A y $\overline{B}$, $\overline{A}$ y B, y $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

NP 15 Demostrar que si A, B y C son independientes y tienen probabilidades no nulas entonces $P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})$.

NP 16 Tirando una moneda, indicar la probabilidad de que ocurran 5 caras antes de que ocurran 2 cecas.

NP 17 A y B tiran ambos un dado. Indicar la probabilidad de que gane A en el supuesto que B no saque 3 ó menos.

NP 18 Se hacen 3 tiros de moneda. En cada tiro si sale cara se pone una bolilla azul en una bolsa y si sale ceca se pone una blanca. Indicar la probabilidad e que al sacar luego una bolilla de la bolsa ésta resulte ser azul.

NP 19 Sea una moneda normal (cara y ceca) y otra moneda con 2 caras. Se elige una de estas monedas al azar, se la revolea y sale cara. Indicar la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la que tiene 2 caras.

NP 20 Dos dígitos se eligen al azar entre 1 y 9. Si su suma resulta ser par, indicar la probabilidad de que ambos dígitos sean impares.

NP 21 Por una carretera pasa un 25% de camiones y un 75% de autos. Las probabilidades de que paren en una cierta estación de servicio son 0,01 y 0,02 respectivamente. Indicar la probabilidad de que el próximo vehículo que pare en dicha estación sea un camión.

NP 22 Sea una bolsa V_1 con 4 bolillas azules y 6 blancas y otra bolsa V_2 con 5 azules y 5 blancas. Se saca una bolilla azul de una bolsa elegida al azar. Indicar la probabilidad de que también sea azul una bolilla extraída con posterioridad de la otra bolsa.

NP 23 De una bolsa que contiene 5 bolas azules y 5 blancas se transfieren 5 bolas al azar a una bolsa vacía. Se saca una bola de esta última bolsa y resulta ser azul. Indicar la probabilidad de que las 5 bolas transferidas de la primera bolsa a la segunda hayan sido todas azules.

NP 24 En un taller hay 2 máquinas A y B que respectivamente producen un 80% y un 20% de la producción total con un porcentaje de piezas defectuosas del 10% y 20% respectivamente. Indicar la probabilidad de que de 2 piezas buenas elegidas al azar, una provenga de la máquina A y la otra de la B.